

文章编号:1000-8055(2013)12-2829-07

基于全自由尾涡模型的最佳环量分布 风力机叶片气动优化方法

宋显成¹, 陈江¹, 杜刚¹, 曹人靖²

(1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191;

2. 广东明阳风电产业集团有限公司, 广东 中山 528437)

摘 要: 通过优化环量分布, 开发了一种快速的风力机叶片气动优化设计方法. 方法中引入了全自由尾涡模型, 通过并行处理技术和快速多极子方法加速计算. 采用傅里叶级数参数化叶片附着涡环量分布, 大幅减少了优化变量数目. 以风能利用系数为目标函数, 以给定轴向力系数为约束条件, 获得环量分布后反求得到叶片最优几何参数. 最后通过优化美国可再生能源实验室(NREL)实验风轮进行方法验证, 结果表明: 在约束条件下, 当尖速比分别为 3.79 和 4.74 时, 优化使风轮的风能利用系数分别提升了 32% 和 8%. 在无约束条件下, 针对不同叶片数和尖速比, 分别对原 NREL 风轮进行全局优化, 得到了风能利用系数均超过 0.48 以上的最优设计.

关 键 词: 风力机; 叶片; 全自由尾涡模型; 气动优化; 最佳附着涡环量分布

中图分类号: V231.3; TG662

文献标志码: A

Aerodynamic optimization of wind turbine with optimal circulation distribution based on full free vortex wake model

SONG Xian-cheng¹, CHEN Jiang¹, DU Gang¹, CAO Ren-jing²

(1. School of Energy and Power Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;

2. Guangdong Mingyang Wind Power Industry Group Company Limited,
Zhongshan Guangdong 528437, China)

Abstract: Through optimization of the blade bound circulation distribution, a fast aerodynamic optimization method for blade of wind turbine was developed. In the method, the full free vortex wake model was introduced, and then computed quickly by parallel processing and fast multipole method (FMM). When selecting Fourier series representation of the bound circulation as the optimization variables to decrease the number of optimization variables, using the power coefficient as an objective function and adding the thrust coefficient as a constraint, optimization was carried out and optimal blade geometry parameters were obtained from optimal circulation distribution. This was validated through comparisons with the National Renewable Energy Laboratory (NREL) experimental rotor. Results show that, when tip speed ratio was 3.79 and 4.74, with a thrust coefficient constraint, optimization could enhance the power coefficient by 32% and 8%, respectively. When a variety of blade numbers and tip speed ratios were chosen, without a thrust constraint, global optimizations were performed, and the power coefficients are over 0.48.

收稿日期: 2012-12-03

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20131111.1602.026.html>

基金项目: 国家高技术研究发展计划(2012AA051301); 省部产学研项目(2010A090200062)

作者简介: 宋显成(1981—), 男, 黑龙江兰西人, 博士生, 主要从事流体机械与空气动力学研究. E-mail: songxc_good@163.com

Key words: wind turbine; blade; full free vortex wake model;
aerodynamic optimization; optimal blade bound circulation distribution

风力机风轮的气动性能直接取决于其叶片的附着涡环量分布,因此叶片气动优化问题可转化为优化其环量分布问题,这样可以使优化变量比直接优化几何参数大幅减少. Prandtl 和 Betz^[1]最早于 1919 年导出了均匀流中螺旋桨最佳环量分布的条件. Goldstein^[2]提出了一种无黏流动中获得最佳环量分布计算模型,该模型的数值解后来在螺旋桨设计开发中得以应用^[3-4]. Chattot^[5]将 Goldstein 模型在风力机的优化设计中推广,并取得了较好的效果,Chattot 还将其应用到了带有叶尖装置的风力机叶片的气动优化设计当中^[6]. 尽管如此,这些优化工作皆基于规则螺旋尾涡模型进行,未能采用与实际流动更相符的自由尾涡模型实现. 研究表明,基于自由尾涡模型的气动计算能获得比叶素动量理论(blade element momentum, BEM)更准确的气动结果,而且其计算量远远小于 CFD 方法,适合工程应用推广^[7-9]. 因此,研究采用自由尾涡模型,尤其是全自由尾涡模型,实现最佳环量分布的风力机叶片气动优化将具有重要工程意义.

鉴于此,考虑到 Goldstein 模型气动优化方法存在的不足,本文研究一种基于全自由尾涡模型(full free vortex wake method, FFVWM)的最佳环量分布风力机叶片气动优化方法. 该方法借助并行计算处理技术和快速多极子方法(fast multipole method, FMM)^[10]加速尾迹迭代和气动性能求解,最后以美国可再生能源实验室(NREL)^[11]实验风轮为算例对方法进行验证.

1 全自由尾涡气动计算模型

1.1 气动模型

对于自由尾涡方法的风力机气动计算,在以往的研究中,出于节省计算资源的考虑,大都不同程度地对尾迹做了简化处理,如将尾迹简化成刚性的近尾迹和自由单根叶尖远尾迹的结构^[7-9]. 实际上,风轮后的尾迹为一全径向分布的复杂自由尾涡面,对其简化的处理将近似甚至忽略内层涡丝的影响,以致引起尾迹结构和气动预测结果的偏差. 当前的研究中,采用多涡丝全自由尾涡模型,不作近尾迹和远尾迹的区域划分,取足够的有限长度的尾迹,完全按照自由尾迹的控制方程迭代求解,以便更精确地求解尾迹结构和风轮的气

动特性.

将尾迹的几何用一系列运动的点标记,标记点定义为 $\mathbf{r}(\tau, \psi, \zeta)$, 如图 1 所示. $\mathbf{r}$ 为尾迹的空间位置向量, τ 表示涡丝对应的径向位置; ψ 表示叶片方位角度,从 x 坐标轴正方向记起,满足 $d\psi/dt = \Omega$ 关系; $\zeta = \Omega(t - t_0)$ 作为标记点的尾龄角度, t_0 是第一个被产生的尾迹标记点的时间,一般从尾缘开始记起,更为简化的是从升力线处记起.

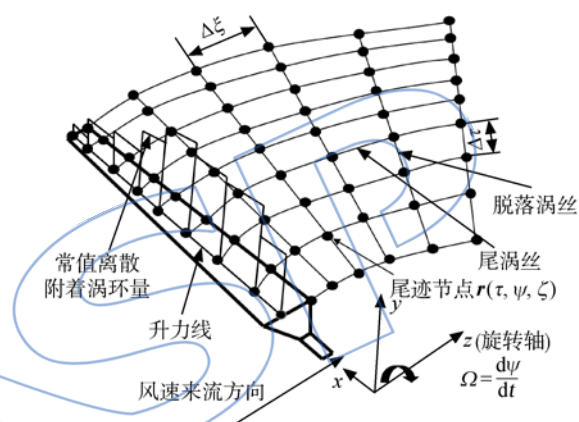


图 1 叶片模型和全展自由尾涡气动模型

Fig. 1 Blade model and full free vortex wake model

风轮后的尾涡面为自由尾涡面,即尾涡随当地流速自由移动,所以其几何位置满足如下控制方程:

$$\frac{d\mathbf{r}(\tau, \psi, \zeta)}{dt} = \mathbf{V}_\infty[\mathbf{r}(\tau, \psi, \zeta)] - \mathbf{V}_\infty \quad (1)$$

其中 $\mathbf{V}_\infty$ 为自由来流速度. $\mathbf{V}_\infty$ 诱导速度,它包括两部分的诱导:一部分是来自叶片的附着涡诱导速度;另一部分是来自尾迹自身的诱导速度. 诱导速度计算采用带有涡核修正的 Biot-Savart 定律确定

$$d\mathbf{V}_\infty = K_v \frac{d\mathbf{\Gamma} ds \times \mathbf{r}'}{4\pi |\mathbf{r}'|^3} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{\Gamma}$ 为叶片附着涡环量.

黏性参数 K_v 为涡核修正模型

$$K_v = \frac{h^2}{\sqrt{r_c^2 + h^2}} \quad (3)$$

式中 h 为受扰点到涡丝微元的垂直距离,涡核 r_c 定义为

$$r_c(\zeta) = 2.24 \sqrt{\delta_v \nu \frac{\zeta}{\Omega}} + r_{co} \quad (4)$$

式中 δ_v 为湍流耗散系数, ν 为运动黏度, Leishman

等^[12]首先将此系数添加到涡核修正当中,以考虑湍流尾迹中的涡量耗散,参考旋翼实验研究^[13-14], δ_v 对于小型风力机取 10,大型风力机在 100~1000 取值。 r_{co} 为 $\zeta=0(t=0)$ 时的非零涡核半径,因为由于叶片表面边界层的存在,从尾缘拖出的尾涡从一开始就有黏性的影响存在。

尾涡的自由发展导致了涡丝的拉伸,拉伸对涡量的影响通过进一步修正涡核予以考虑

$$r'_c = r_c \sqrt{\frac{1}{1+\epsilon}} \quad (5)$$

式中 ϵ 表示拉伸长度,由 Helmholtz 第三定律推导得出。

对于叶片部分,采用了经典的普朗特升力线气动模型,将叶片上附着涡环量分布、扭角分布和弦长分布均按常值离散,如图 1 所示,将叶片按照 Cosin 法则离散 $n-1$ 个常值微元段

$$r_k = \frac{1}{2}(R_{\text{root}} + R_{\text{tip}}) - \frac{1}{2}(R_{\text{root}} - R_{\text{tip}})\cos\varphi_k \quad (6)$$

其中 $0 \leq k \leq n-1$, $\varphi_{k+1} = \varphi_k + \frac{\pi}{n-1}$, $\varphi_0 = 0$, R_{root} 和 R_{tip} 分别为叶根处和叶尖处的半径值。

1.2 数值求解

数值求解过程主要以自由尾涡的迭代为主,按照 Bagai 和 Leishman^[15]的伪隐式预估-校正-松弛求解技巧进行迭代。在迭代过程中,涉及频繁应用 Boit-Savart 定律求解诱导速度,这是最耗时的计算过程,通过采用了快速多极子方法^[16],将计算量从 N^2 降低到 $N \lg N$,并结合了并行处理技术,实现了快速地求解诱导速度的过程。

求解叶片附着涡环量分布是尾涡迭代的重要环节,由于采用了升力线模型,需结合翼型数据求解环量,即依据 Kutta-Joukowski 升力定理和叶素理论,得平衡方程

$$\Gamma_k = \frac{1}{2}C_l(\theta_k - \Delta\alpha_k - \beta_k)c_k|\mathbf{W}_k| \quad (7)$$

其中 $\mathbf{W}_k = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_{\text{in}}$ 为断面处的合速度, θ_k 为入流角度, $\Delta\alpha_k$ 为下洗角, β_k 安放角, c_k 为弦长, C_l 为升力系数。

控制点处的诱导速度可表示为

$$\mathbf{V}_{\text{in}} = \mathbf{C}_{\text{in}}\Gamma_k + \mathbf{V}_{\text{inw}} \quad (8)$$

其中 $\mathbf{V}_{\text{inw}}$ 为尾迹对控制点的诱导速度, $\mathbf{C}_{\text{in}}$ 为诱导系数矩阵,定义为单位环量强度的附着涡对控制点的诱导速度,三个方向各自对应一个矩阵 $\mathbf{C}_{\text{in}} = [C_x, C_y, C_z]$ 。

2 最佳环量分布气动优化模型

2.1 目标函数

在给定转速和轴向风速下,给定推力系数 F_{t0} 约束条件,以风能利用系数或年均输出功率为目标函数 I ,将有约束问题变为无约束问题

$$I = C_p + \lambda(F_t - F_{t0}) \quad (9)$$

或

$$I = P_a + \lambda(F_t - F_{t0}) \quad (10)$$

其中 C_p 为风能利用系数, λ 为拉格朗日乘子, F_t 为某一推力系数,它既是塔架结构上的一个约束,又可作为流动求解的可控约束,有助于最优解快速稳定地收敛。 P_a 为年均输出功率,表示为

$$P_a = \int_{V_{\text{in}}}^{V_{\text{out}}} 0.5\rho\pi R^2 V^3 C_p(V) p_w(V) dV \quad (11)$$

其中 $p_w(V)$ 为风速分布概率密度,一般取威布尔分布, V_{in} 为切入风速, V_{out} 为切出风速。

2.2 优化变量

风力机在最优能量输出状态工作时,一般为贴体流动,其诱导损失和黏性损失都应该达到最小,各个叶素处可认为具有最佳的升阻比,此时的有效攻角可认为满足最佳攻角 α_{opt} ,根据平衡方程(7),最优的安放角和弦长分布可表示为

$$\begin{cases} \beta_k = \theta_k - \Delta\alpha_k - \alpha_{\text{opt}} \\ c_k = \frac{2\Gamma_k}{|\mathbf{W}_k|C_l(\alpha_{\text{opt}})} \end{cases} \quad (12)$$

式(12)中最优的叶片几何参数 β_k 和 c_k 的确定需由最优的 $\Delta\alpha_k$ 和 $\mathbf{W}_k$ 和 Γ_k 确定。根据自由尾涡方法原理,对某一叶片附着涡环量分布 Γ_k ,可通过全自由尾涡方法求解对应的尾涡结构,并可相继获得对应的 $\mathbf{W}_k$ 和 $\Delta\alpha_k$ 以及目标函数值 I ,所以,以此方式可将优化几何 β_k 和 c_k 的问题转变为进行优化叶片附着涡环量分布 Γ_k 的问题,即优化变量只为叶片的附着涡环量分布,这可使得优化变量的规模显著减少。通过对叶片附着涡环量分布进行参量化表达 Γ_k ,可以将优化变量的规模再进一步减少。相比于叶片几何参数 c_k 和 β_k ,环量分布更易于被参数化表达,可将其展开成傅里叶级数形式

$$\Gamma_k = \sum_{m=1}^N A_m \sin(m\varphi_k) \quad (13)$$

所以,最终的优化变量只是待定系数,一般 $N=3\sim 5$ 即可获得满意的优化解。

2.3 初始环量分布

初始的最优环量分布的确定可依据无黏的 Goldstein 模型^[8],用直线段涡元离散螺旋尾涡线求诱导,参考 Chattota^[5]的研究方法,将优化问题转为变分问题

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial \Gamma_k} = \frac{\partial I}{\partial \lambda} = C_t - C_{t0} = 0 \\ \frac{\partial C_p}{\partial \Gamma_k} + \lambda \frac{\partial C_t}{\partial \Gamma_k} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

应用牛顿法迭代求解方程组(14),可快速得到叶片的初始最佳 Γ_k .

2.4 优化算法

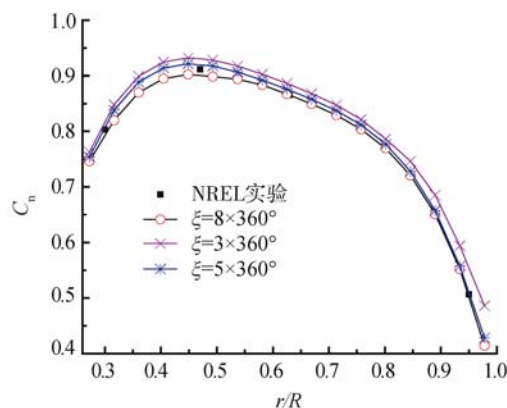
优化属于非线性优化问题,由于变量较少,且适当的轴向力约束即可避免局部收敛,因此,为了加快收敛,宜于选用具有高阶收敛速度的优化算法,不宜采用群智能类优化算法(如遗传算法等),以避免优化耗时耗力. 研究中采用了一种拟牛顿法(BFGS). BFGS 在每一步迭代时只需计算目标函数的梯度,并通过测量梯度的变化,构造一个目标函数的模型,使优化产生超线性的收敛性,从而避免了直接求取 2 阶导数的耗时计算. BFGS 优于最速下降法,甚至有时比牛顿法更为有效,是目前处理非线性优化问题的一种广泛采用的优化算法.

3 验证

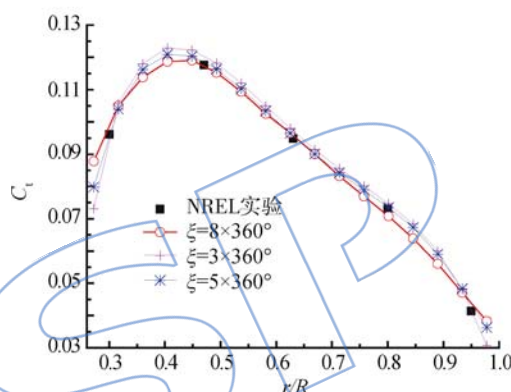
为验证方法的有效性,采用 NREL 实验风轮 Phase VI^[14]为研究的验证算例. NREL Phase VI 是一款可变桨距调节型风力机,风轮半径为 5.029 m,叶片从根到尖的剖面都采用 S809 翼型,其实验数据被广泛地应用于各种相关的研究的验证. 验证分为两步:即首先应验证全自由尾涡气动计算方法的有效性;然后再验证基于气动计算方法的气动优化的有效性.

3.1 气动分析

轴向来流条件下,以自由来流速度 $V_\infty = 7 \text{ m/s}$ 为例,计算了叶片沿展向各个位置的轴向力系数(C_n)和切向力系数(C_t),并与 NREL 实验对比,如图 2 所示. 在这一来流条件下,法向力系数和切向力系数的分布与实验吻合得很好. 图中虚线代表采用不同尾迹计算长度对计算结果的敏感度,可以看出,5 圈的计算结果和 8 圈的计算结果偏差并不大,都比较接近实验值. 而 3 圈的计算结果明显出现不容忽视的偏差,在这一工况下,5



(a) 轴向力系数



(b) 切向力系数

图2 不同长度尾涡模型的 C_n 和 C_t 展向分布对比结果

Fig. 2 Comparison between measured and computed spanwise distribution of normal C_n and tangential C_t force coefficients for different wake extension $l \times \Omega$

圈的尾迹大约对应 2 倍风轮直径的轴向距离,可将此距离作为全自由尾涡模型截断的一个参考标准,即为满足精度要求,至少应取风轮后至少 2 倍风轮直径的尾迹距离.

图 3 给出了轴向来流时 NREL Phase VI 在不同风速下风能利用系数 C_p 实验结果及对比. 其中,也给出了用 CFD 方法计算的结果^[16]对比. 由图中可以看出,当尖速比 $R_{ts} > 3.79$ (自由来流速度 $V_\infty < 10 \text{ m/s}$) 时,因流动尚未出现明显分离,故计算结果与实验能够吻合得很好,但是,CFD 计算在 $R_{ts} = 3.79$ (自由来流速度 $V_\infty = 10 \text{ m/s}$) 附近范围时出现了较大的偏差. 当尖速比 $R_{ts} < 3.79$ (自由来流速度 $V_\infty > 10 \text{ m/s}$) 时,随动态失速的加剧和三维旋转效应程度加深,全自由尾涡方法比实验值偏高,而 CFD 计算结果偏低,但总体趋势均能够保持一致性.

图 4 显示了自由来流速度 $V_\infty = 7 \text{ m/s}$ 时风轮

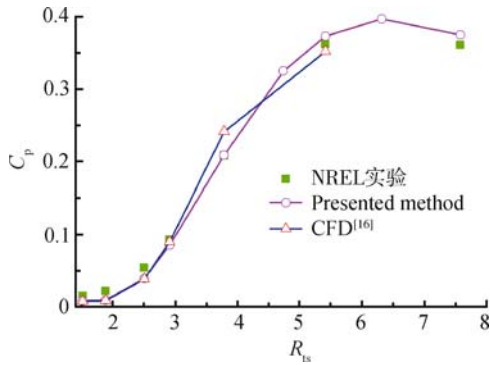


图 3 不同尖速比时风能利用系数的计算与实验结果对比

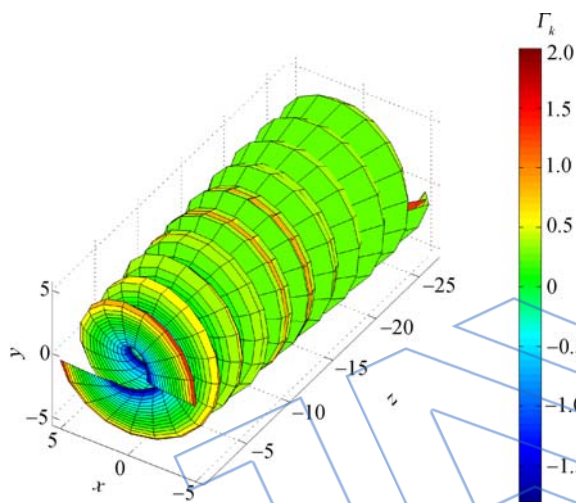
Fig. 3 Comparison between measured and computed power coefficient C_p when varying tip speed ratio R_{ts} 

图 4 风轮后的全自由尾涡面

Fig. 4 Full free vortex wake behind the wind turbine rotor

后的全自由尾涡面,可以看出尾迹几乎是在一离开叶片尾缘便开始了畸变,并开始膨胀,叶尖和叶根附近区域的涡面逐渐地卷起。另外,图中还用颜色的深浅表示了尾涡面上的涡量强度,能够看到,在近尾迹区的叶根和叶尖区的相当范围内均存在着较强尾涡。图 4 整体表明:为准确地计算叶片所受气动载荷,有必要对尾迹采用全尾涡模型精确模拟,尤其是近尾迹区的尾涡不宜被简化或者近似。

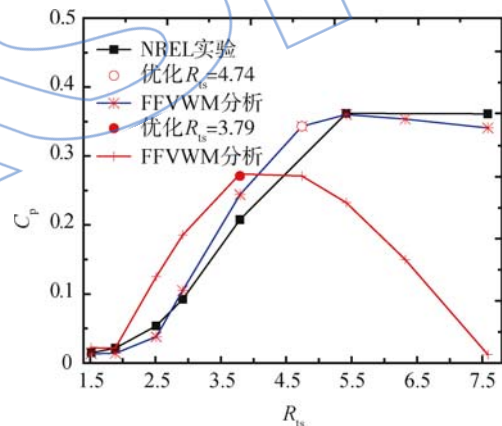
以上在轴流条件下,通过与 NREL Phase VI 的实验结果对比分析验证了全自由尾涡气动性能计算方法的有效性,说明用其进行叶片气动优化具有可行性。

3.2 气动优化

分别在尖速比 $R_{ts}=3.79$ (自由来流速度 $V_\infty=10\text{ m/s}$) 和 $R_{ts}=4.74$ (自由来流速度 $V_\infty=8\text{ m/s}$)

时,保持与 NREL Phase VI 对应的相同轴向力系数,用同样的 S 809 翼型,分别执行优化。用所开发的分析方法对优化风轮进行计算并与原 NREL Phase VI 的实验结果对比,如图 5 所示。虽然 NREL 风轮不是以这些条件下进行的最优设计,但利用其已有的实验数据作为其他风轮同等条件下的性能对比是可取的。优化后的弦长(c)和扭角(β)分布如图 6 所示。 $R_{ts}=3.79$ 时, NREL 风轮的 $C_p=0.207$, 优化后为 $C_p=0.274$, 提升了近 32%。 $R_{ts}=4.74$ 时,原 NREL 风轮的 $C_p=0.318$, 优化后 $C_p=0.342$, 提升了近 8%。优化后的气动性能均有显著提升。

图 7 显示了优化前后叶片附着涡环量分布对比。从图中可看出,更利于降低诱导损失的叶片附着涡环量分布是趋于沿叶片展向对称的分布,并在叶片内层具有较高的附着涡环量,这导致了优化后的叶片沿展向大部分区域分布着更长弦长(如图 6 所示),进而增加了升力和雷诺数,致使能量输出提高。同时可以看到,优化后风轮形成尾涡

图 5 优化设计风能利用系数 C_p 与

NREL Phase VI 对比

Fig. 5 Comparison between NREL Phase VI power coefficient C_p and optimum designs

的强度趋于向内侧更大范围散布,弱化了原风轮尾涡强度在叶尖区集中,这进一步说明,采用全自由尾涡模型的气动重要性。

图 8 显示了优化前后风轮沿展向的攻角(α)分布对比,在叶片大部分区域,优化后的叶片维持了 S809 翼型的最佳升阻比对应的攻角值(7° 左右),黏性的损失被降低。因原风轮为失速型风轮,设计攻角较大,所以优化后叶片沿展向分布着比原 NREL Phase VI 更大的安装角(如图 6 所示)。

为了验证优化设计方法具有全局的最优 C_p

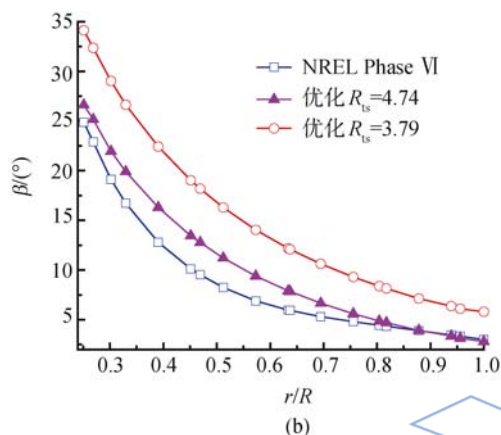
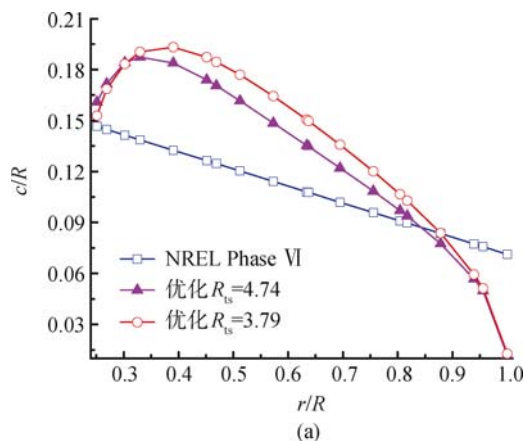


图6 优化设计的扭角弦长分布与 NREL Phase VI 对比

Fig. 6 Comparison of chord distribution and twist distribution between NREL Phase VI and optimum design

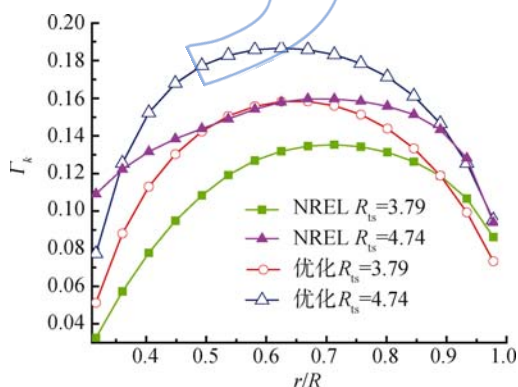


图7 优化设计的附着涡环量分布与 NREL Phase VI 对比

Fig. 7 Comparison of bound circulation distribution between optimum designs and NREL Phase VI

优化设计能力,仍采用 S809 翼型,以不同的尖速比作为设计点,分别进行两叶片和三叶片风轮的全局最优 C_p 的优化设计,图 9 给出了全局最优

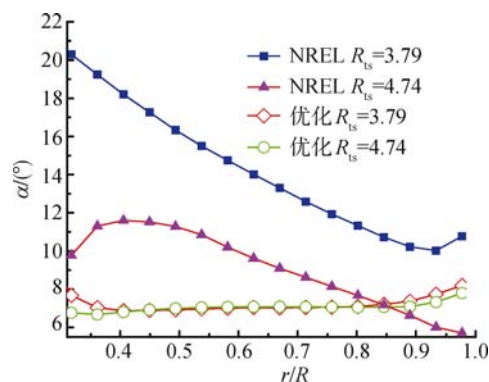


图8 优化设计的攻角与 NREL Phase VI 对比

Fig. 8 Comparison between NREL Phase VI

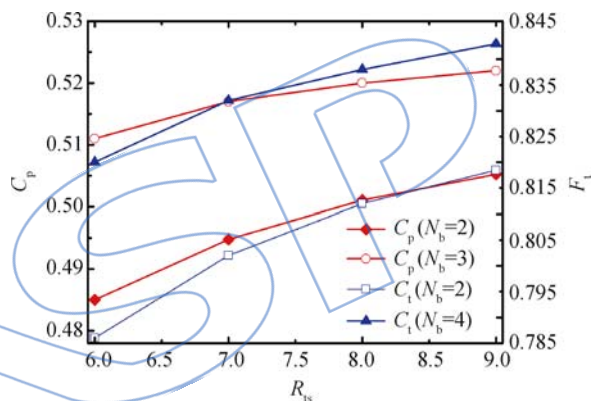


图9 随设计尖速比变化的两叶片和三叶片风轮的全局最优 C_p 及对应的 C_t 曲线

Fig. 9 Global optimal C_p and corresponding C_t curves as a function of designed tip speed ratio for rotors of 2 and 3 blades

C_p 对应的 C_t 随设计尖速比变化的曲线图(图中 N_b 为叶片数).由图中的变化规律可以看出,三叶片的风轮的最优 C_p 显高于二叶片风轮.最优 C_p 随尖速比增加而增加,其敏感度随尖速比的增加逐渐变小,超过 $R_{ts} = 8.0$ 后 C_p 尖速比的增加幅度已很小.最值得注意的,最优 C_p 的 C_t 基本在 0.8 左右,作为优化的一个指导原则,可以在这一值附近设定 C_t 作为约束,以加速优化收敛到全局的最优 C_p ,这体现了引入气动约束条件(如推力系数)的优势.

4 结 论

本文在风力机风轮全自由尾涡模型下,通过优化叶片环量分布,并借助并行处理技术和快速多极子方法加速尾迹迭代,实现了一种风力机叶片气动优化设计方法.与 NREL 实验结果对比分

析表明了方法的有效性和采用全自由尾涡模型的重要性。

研究中,傅里叶级数的应用,对优化求解由起到了稳定和加速的效果。优化借助了翼型的二维实验数据,未能全面考虑三维效应的影响,进一步的研究将以全自由尾涡法耦合近叶片区求解三维 N-S 方程予以改进。

参考文献:

- [1] Betz A. Schraubenpropeller mit geringstem energieverlust mit einem zusatz von l. prandtl[J]. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1919, 1919: 193-217. (in French)
- [2] Goldstein S. On the vortex theory of screw propellers[J]. Proceedings of the Royal Society of London: Series A, 1929, 123(792): 440-465.
- [3] Theodorsen T. Theory of propellers[M]. New York: McGraw-Hill, 1948.
- [4] Adkins C, Liebeck R. Design of optimum propellers[J]. Journal of Propulsion and Power, 1994, 10(5): 676-682.
- [5] Chattot J J. Optimization of wind turbines using helicoidal vortex model[J]. Transactions of the ASME, 2003, 125(4): 418-424.
- [6] Chattot J J. Effects of blade tip modifications on wind turbine performance using vortex model[J]. Computers & Fluids, 2009, 38(7): 1405-1410.
- [7] Brown R. Rotor wake modeling for flight dynamic simulation of helicopters[J]. AIAA Journal, 2000, 38(1): 57-63.
- [8] Schreck S. The NREL full-scale wind tunnel experiment [J]. Introduction to the Special Issue. Wind Energy, 2002, 5(2/3): 77-84.
- [9] Sant T, Van Kuik G, Van Bussel G J W. Estimating the angle of attack from blade pressure measurements on the NREL phase VI rotor using a free wake vortex model: axial conditions[J]. Wind Energy, 2006, 9(6): 549-577.
- [10] Gupta S, Leishman J G. Comparison of momentum and vortex methods for the aerodynamic analysis of wind turbines[R]. AIAA 2005-594, 2005.
- [11] Gupta S. Development of a time-accurate viscous Lagrangian vortex wake model for wind turbine applications[D]. Maryland: University of Maryland, 2006.
- [12] Leishman J G, Bhagwat M J, Bagai A. Free-vortex filament methods for the analysis of helicopter rotor wakes[J]. Journal of Aircraft, 2002, 39(5): 759-775.
- [13] Ananthan S, Leishman J G, Ramasamy M. The role of filament stretching in the free-vortex modelling of rotor wakes[R]. Montreal, Canada: 58th Annual Forum and Technology Display of the American Helicopter Society International, 2002.
- [14] Bhagwat M J, Leishman J G. Generalized viscous vortex model for application to free-wake and aeroacoustic calculations[R]. Montreal, Canada: 58th Annual Forum and Technology Display of the American Helicopter Society International, 2002.
- [15] Bagai A, Leishman J G. Rotor free-wake modeling using a pseudoimplicit relaxation algorithm[J]. Journal of Aircraft, 1995, 32(6): 1276-1285.
- [16] Potsdam M, Mavriplis D J. Unstructured mesh CFD aerodynamic analysis of the nrel phase VI rotor[R]. AIAA 2009-1221, 2009.